代数幾何学シンポジウム記録
1978年度 pp.139-160

位相的自明な法バンドルをもつコンパクトな複素曲線の近傍について

上田哲生

二次元複素多様体とその連結かつコンパクトな一次元複素部分多様体 C を考えよう。以下 C を（非特異既約）曲線とよぶ。我々の目的は曲線 C の近傍の複素解析的（あるいは幾何学的）な性質を，特に C の自己交点数が零の場合について，調べることである。Ⅰでは結果を，Ⅱでは証明のスケッチを述べる。

Ⅰ. 1°. 向きのついた微分多様体としては，C の近傍の構造は C の法束（バンドル） N_C の Chern 類 $c(N_C) \in H^2(C, \mathbb{Z})$ によって，即ち C の自己交点数 $(C^2) \in \mathbb{Z}$ によって定まる。この位相的性質は次のように複素解析的性質に反映される：

(1) $(C^2) < 0 \iff C$ は強擬凸な近傍をもつ。

(2) $(C^2) > 0 \Rightarrow C$（の近傍）は次の性質

なもつ：

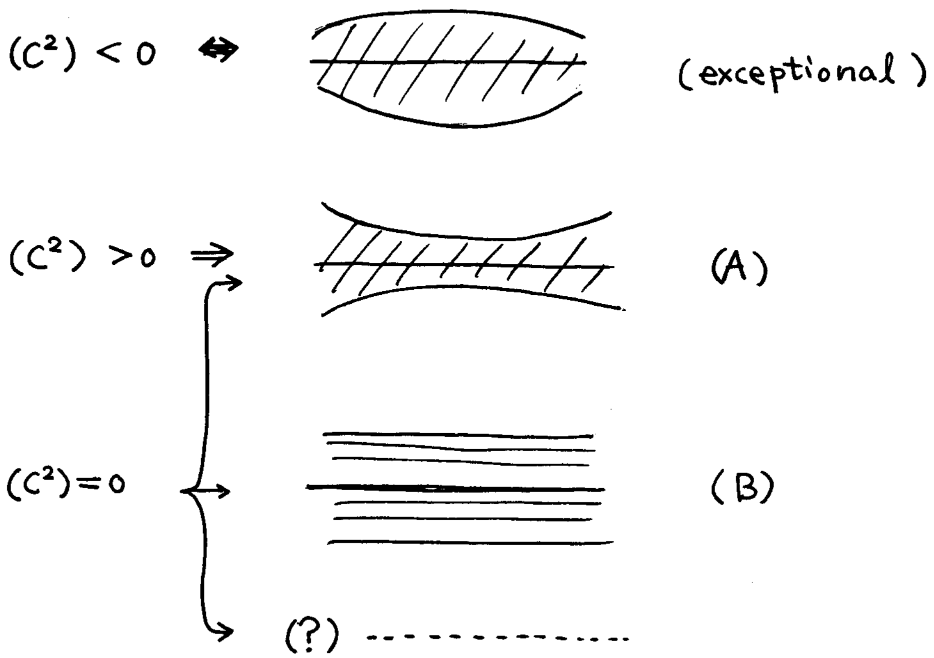
Property (A). 曲線 C の近傍 V 及び $V-C$ の上の強擬凸函数（＝強多重劣調和函数）Φ が存在して $\lim_{p\to C}\Phi(p)=+\infty$ となる。——

REMARK. 性質(A)より C の強擬凸近傍の基本系（連続な family）の存在が導かれる。即ち

$$C\cup\{p\in V-C \mid \Phi(p)>N\} \quad (N\text{は充分大}).$$

2° ところが $(C^2)=0$ の場合，即ち C の法束 N_C が位相的に自明の場合，には状況は複雑になる。性質(A)をもつ場合とそうでない場合の両方が存在する。後者の簡単な例として，曲線 C がその近傍における正則函数の零点であるもの，また，ある曲線上の位相的自明な直線束の零切断，等がある。これらを一般化して次の性質(B)を考えよう：

Property (B). 曲線 C の近傍の開被覆 $\{V_\lambda\}$ 及び各 V_λ 上の正則函数の系 $\{w_\lambda\}$ で，各 V_λ 上 $w_\lambda=0$ は C の局所方程式であり，各 $V_\lambda\cap V_\mu$ 上 w_λ/w_μ は絶対値 1 の定数となるものがある。—



REMARK. ① 性質(B)は次の様にも述べられる：曲線Cの近傍にCをdivisorとして与える（一般に多価の）乗法的函数wで，その乗数が絶対値1の定数なるものがある。

② (B)が成立つとして，$t_{\lambda\mu} \doteq w_\lambda / w_\mu$ とおくと，Cの被覆$\{U_\lambda \cap C\}$に関する1-cocycle $\{t_{\lambda\mu}\}$は，Cの複素法束N_Cを定義している。またN_Cの位数が有限mなら，①の乗法的函数はm価であり，これよりCの近傍の一価正則函数w^mでそのdivisorがmCなるものができる。

③　性質(A), (B)は両立しない。(O. Suzuki [9])
これを見るために，(B)が成立していると仮定しよう。各V_λ上　w_λ＝定数(充分小)　で与えられる foliation は，Cの近傍における foliation を定めている。各 leaf は
$\Sigma_\varepsilon = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{p\in V_\lambda \mid |w_\lambda(p)|=\varepsilon\}$　なる実解析的超曲面に含まれている。

(i) N_C の位数有限のときは，各 leaf は w^m＝定数　なるコンパクトな曲線，また (ii) N_C の位数無限のときは各 leaf は Σ_ε の中の稠密な集合となる。Σ_εの近傍に擬凸函数 (＝多重劣調和函数) φ があるとしよう。(i)の場合，φ は曲線 w^m＝定数　上定数で φ は w^m に従属した函数。
(ii)の場合，φ は Σ_ε 上定数である。実際，φ は Σ_ε のある点 p_0 で最大値をとり，p_0 を通る leaf の上で，最大値の原理により定数。これが Σ_ε で稠密だからここでも定数となる。

また同様に，Σ_ε の近傍で定義された正則函数は，(i) の場合 w^m に従属，(ii) の場合 Σ_ε 上定数だから定数。

3° 上のような性質を調べるために，$(C^2)=0$ なる曲線をその type (1, 2, ⋯ または infinite) に従って次のように分類する：（II. 2° をも見よ）

DEFINITION 1. $\{(V_\lambda, w_\lambda)\}$ を C の近傍の被覆 $\{V_\lambda\}$ 及び各 V_λ 上の正則函数 w_λ で $w_\lambda=0$ が C の局所方程式を与えるものからなる系とする。系 $\{(V_\lambda, w_\lambda)\}$ が各 $V_\lambda \cap V_\mu$ 上 $|w_\lambda/w_\mu| = 1 + O(|w_\lambda|^n)$ なるとき type n とよぶ。——

DEFINITION 2.

$$C \text{ が finite type } n \iff \begin{cases} \text{type } n \text{ の系が存在し} \\ \text{type } n+1 \text{ の系はない.} \end{cases}$$

$$C \text{ が infinite type} \iff \text{いかなる } k \text{ に対しても type } k \text{ の系が存在する.}$$

少くとも type 1 の系は存在する。このような系 $\{(V_\lambda, w_\lambda)\}$ をとり，曲線 C と点 p との距離を与える滑らかな函数 $r(p)$ として，$r(p) \sim |w_\lambda(p)|$ $(p \in V_\lambda,\ p \to C)$ なるものをとっておく。

4°

THEOREM 1. 曲線 C は，$(C^2)=0$ ，finite type n とする。このとき性質(A)が成立つ。より詳しく，任意の正数 ε に対して，強擬凸函数 Φ を $\Phi(p) \sim 1/r(p)^{n+\varepsilon}$ $(p \to C)$ となる様にとれる。

THEOREM 2. 曲線 C は上と同様とする。また V を C のある近傍，Ψ を $V-C$ 上の擬凸函数とする。ある正数 ε があって，$\Psi(p)=o(1/r(p)$ $(p \to C)$ ならば，Ψ は $V'-C$ 上定数である，ここに V' は V に含まれる C のある近傍。——

REMARK. Ψ は強擬凸でなくてもよい。また $p \to C$ のとき $\Psi(p) \to +\infty$ とならなくてもよい。

COROLLARY. 曲線 C は上と同様とする。V を C のある近傍，f を $V-C$ 上の正則函数とする。ある正数 ε があって $\log|f(p)| = o(1/r(p)^{n-\varepsilon})$ $(p \to C)$ ならば，f は定数である。——

REMARK. 曲線 C 上に特異点をもつ正則函数は一次元の場合の孤立特異点をもつ正則函数の類似と見られるが，我々の場合，一変数のときにも，また $(C^2)>0$ のときにも現われない制限が函数の増大度にくわわる。これは C の近傍の global な structure に由来している。

5° infinite type の場合について結果を述べるために，まず定義をする。曲線 C の種数を g とすると，C の Picard 多様体 $\mathrm{Pic}(C)$ は実 $2g$ 次元トーラス $\mathbb{T}^{2g}$ と同一視される。$\mathrm{Pic}(C)$ の部分集合 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\cup\mathcal{E}_1$ を次の様に定める。

$$\mathcal{E}_0 = \{ E\in \mathrm{Pic}(C) \mid E \text{ は位数有限} \}$$

$$\mathcal{E}_1 = \{ E\in \mathrm{Pic}(C) \mid \log\frac{1}{d(E^k,1)} = O(\log k)\ (k\to\infty) \}$$

ここに $d(E^k,1)$ は E の k 階テンサー E^k と，$\mathrm{Pic}(C)$ の単位元 1 との距離（$\mathrm{Pic}(C)$ の群の演算によって不変な距離，あるいはそれと同値などんな距離でもよい。）

THEOREM 3. C を曲線，$(C^2)=0$，infinite

typeとする。さらにCの複素法束N_Cが$\mathcal{E}$に属せば，Cは性質(B)をもつ。——

REMARK ① $\mathrm{Pic}(C)-\mathcal{E}$は測度零の集合。この意味で$\mathcal{E}_1$の点は"general"である。しかし$\mathcal{E}_1$はやせた集合（nowhere denseな閉集合の可算和）。

② 種数$g=0$，については，Kodaira-Spencer [ ] の定理の最も簡単な場合。$g=1$についてはArnol'dの結果（の一部分）。

6° TH. 1 及び 3 によって次の表を得る。

N_C \ TYPE	FINITE	INFINITE
$\mathcal{E}$	(A)	(B)
$\mathrm{Pic}(C)-\mathcal{E}$		(?)

(?)の部分については，(B)の場合があることは判るが，(A)の場合があるか，あるいは(A)(B)のいずれでもない場合があるか否か不明。

7° 曲線Cがコンパクトな曲面に含まれている場合に上の結果を応用する。Hartshorneが

提起した次の問題を考えよう。

PROBLEM. Sを二次元コンパクト複素多様体(以下曲面とよぶ), CをSの(既約)曲線とする。$S-C$がコンパクトな曲線を含まないとする。$S-C$がStein多様体となる条件は何か? $(C^2)\geqq 0$で必要充分か?——

◎まず, Grauert [2]によって, $(C^2)>0 \Rightarrow$ $S-C$はStein, 実はもっと強く, $S-C$はnaturalにaffine algebraicとなる。

◎$(C^2)=0$, Cは非特異としよう。まずCの法束N_Cが位数有限のとき。表により, (A), (B)のいずれかが成立つが, (B)の場合にはその周りの正則函数の零点であり, Cと交わらないコンパクトな曲線がある。これは$S-C$が曲線を含まないという仮定に反す。したがって(A), 即ち$S-C$はStein。ただし$(C^2)=0$だからnaturalには$S-C$はaffine algebraicではない。次にN_Cが位数無限のとき。$S-C$がコンパクト

な曲線を含まず，$S-C$ は Stein でない例をつくろう。（[10]） 射影平面 $\mathbb{P}_2$ 上の非特異三次曲線（従って楕円曲線）を C_0 とする。C_0 上に相異なる九個の点 $\{p_j\}_{j=1,\cdots,9}$ をとる。$\{p_j\}$ たちにおける blowing up によって得られる曲面を S，曲線 C_0 の proper image を C と書く。$\{p_j\}$ を適当な（"general" な）位置にとれば『$\mathbb{P}_2$ 上の曲線 D で C_0 との交点 $C_0 \cap D$ が集合 $\{p_j\}$ に含まれる様なものはない』，『C の法束 N_C は $\mathcal{E}_1$ に含まれる』という二条件を同時に充たすことができる。このとき $S-C$ はコンパクトな曲線を含まず，また C は性質(B)をもつ（II, 2° を見よ）ので，$S-C$ は Stein ではない。（I. 2°. REMARK ③）

REMARK. 上の例において $V = \bigcup\{|w|<\varepsilon\}$ なる C の近傍をとると，V も $S-V$ も，S の擬凸な部分領域で，そこには非定数正則函数が存在しない例である（V の方は Grauert[3] の例）

8°

THEOREM (Lefschetz)　Xはコンパクト複素多様体，Yはその解析的集合とする。Yが強擬凹近傍の基本系をもてば，$H_1(Y,\mathbb{Z})\to H_1(X,\mathbb{Z})$は全射準同型である。——

THEOREM 4.　Cを，曲面S上の曲線，$(C^2)=0$，finite type nとする。またN_Cの位数をmとする。またSの一次元ベッチ数は偶数とする。このとき，(1)　$n \leqq m$

(2)　$n=m$ なら $H^1(S,\mathcal{O})\neq 0$。——

上定理の状況において，Sの structure はCの近傍の structure によって双有理同値を除いて決定される。（一般に Stein space の structure はその境界によってきまる）　Cが楕円曲線のときに，Sを具体的に決定しよう。（M. Suzuki によって提起された問題）

THEOREM 5.　Sを曲面，CをS上の楕円曲線

$(C^2)=0$, finite type とする。S, C は次のいずれかである：(i) S は Hopf 曲面で既約曲線をただ一つ含むもの。(ii) S は楕円曲線を base とする $\mathbb{P}_1$-bundle で unique な global section C をもち S−C は解析的に自明でない $\mathbb{C}$-bundle となるもの。(このような S は base の楕円曲線の modulus のみによって一意的にきまる)。——

II. 1°. 種数 g のコンパクト Riemann 面の Picard 多様体 $\mathrm{Pic}(C)=\ker(H^1(C,\mathcal{O})\xrightarrow{c}H^2(C,\mathbb{Z}))$ は $H^1(C,\mathbb{T})=\mathbb{T}^{2g}$ と同一視される，ここに $\mathbb{T}=\{t\in\mathbb{C} \mid |t|=1\}$ (乗法群)。即ち，C の開被覆を $\mathcal{U}=\{U_\lambda\}$ として，$\mathrm{Pic}(C)$ に属する直線束 E に対して，各 U_λ 上の fiber 座標 $\{\zeta_\lambda\}$ を適当にとれば，変換函数系 $\{t_{\lambda\mu}\}$ を $t_{\lambda\mu}\in\mathbb{T}$ とできる。この様な E を (unitary) flat な直線束とよぼう。E の fiber norm を $|\zeta_\lambda|$ によって定めておく。

2° 二次元複素多様体上の曲線 C で $(C^2)=0$

なるものを考えよう。Cに関して type k の函数系 $\{(V_\lambda, w_\lambda)\}$ があるとする。(DEF. 1)
$t_{\lambda\mu} = w_\lambda / w_\mu |_{V_\lambda \cap V_\mu \cap C}$ とおけば $|t_{\lambda\mu}| = 1$ で,
$\{t_{\lambda\mu}\}$ は C の被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}$, $U_\lambda = V_\lambda \cap C$, に関して
C の法束 N_C を定義する。各 V_λ 上の正則函数 z_λ をとって, $(w_\lambda\ z_\lambda)$ が V_λ における局所座標を与えるようにする。 $V_\lambda \cap V_\mu$ 上で

$$t_{\lambda\mu} w_\mu - w_\lambda = f_{\lambda\mu|k+1}(z_\lambda) w_\lambda^{k+1} + \cdots\cdot$$

と書ける。$f_{\lambda\mu|k+1}$ を $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の函数とみる。$\{f_{\lambda\mu|k+1}\}$ を被覆 $\mathfrak{U}$ に関する 1-cochain とみると, これは $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}(N_C^{-k}))$ の element である。
これの表わす $H^1(C, \mathcal{O}(N_C^{-k}))$ の element を, k-th obstruction とよぼう。k-th obstruction が消えれば, 函数系 $\{w_\lambda\}$ を変形して新しく type $k+1$ の函数系がつくられる。そしてこれから $(k+1)$-th obstruction が定義される. こうして, ある函数系から出発して, 順次現われる obstruction が消える限り続けていく。消えない obstruction が n-th に現われるとき曲線Cを type n と, 全ての obstructions が消えるとき

infinite type とよぶ。これは出発点にとった函数系によらないことが証明される。この定義は明らかに DEF. 2 と同じである。

REMARK ① $g=0$ のときは $\mathrm{Pic}(C)=\{1\}$: 一点で, $H^1(C,\mathcal{O})=0$ だから全ての obstructions は a priori に消える。

② $g=1$ のとき, N_C の位数が無限なら, やはり全ての obstructions は a priori に消える。実際, (k-th obstruction) $\in H^1(C,\mathcal{O}(N_C^{-k}))=0$.

従って ①,② の場合, C は infinite type.

3° TH. 1. 2 の証明の準備のために, 1° の状況に戻ろう。Flat な直線束 E の定数 [resp. 正則, 反正則, 調和] 切断とは, その fiber 座標による表現が定数 [resp. 〃] な函数であるものをいう, ここに(反正則)=(正則函数の複素共役)。これらのつくる層をそれぞれ, $\mathbb{C}(E)$, $\mathcal{O}(E)$, $\overline{\mathcal{O}}(E)$, $\mathcal{H}(E)$ と書く。Kashiwara に従って (Kodaira [8] p124-126) 次の完全系列を考えよう。

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}(E) \longrightarrow \mathcal{O}(E)\oplus\overline{\mathcal{O}}(E) \longrightarrow \mathcal{H}(E) \longrightarrow 0$$
$$c \longmapsto c \oplus (-c)$$
$$f \oplus \overline{g} \longmapsto f + \overline{g}$$

これより，

$$0 \longrightarrow H^1(C, \mathbb{C}(E)) \xrightarrow{\varphi} H^1(C, \mathcal{O}(E)\oplus\overline{\mathcal{O}}(E)) \xrightarrow{\psi} H^1(C, \mathcal{H}(E))$$

を得るが

$$\dim H^1(C, \mathbb{C}(E)) = \begin{cases} 2g & E = 1 \\ 2g-2 & E \neq 1 \end{cases}.$$

$$\dim H^1(C, \mathcal{O}(E)) = \dim H^1(C, \overline{\mathcal{O}}(E)) = \begin{cases} g & E = 1 \\ g-1 & E \neq 1 \end{cases}.$$

(注. $H^1(C, \overline{\mathcal{O}}(E)) \simeq H^1(C, \mathcal{O}(E^{-1}))$: 反-$\mathbb{C}$-線型な対応)
により，φ は全射，ψ は零写像。従って
$H^1(C, \mathcal{O}(E)) \to H^1(C, \mathcal{H}(E))$ は零写像。これは，
$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ の元は，調和な切断の 0-cochain の coboundary であることを示している。

4° 2°の状況に戻ろう。$\{t_{\lambda\mu}\}$ を C の近傍の被覆 $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}$ に関する 1-cocycle とみて C の近傍上の flat な直線束 F が定義される。F の C 上への制限は N_C に一致する。divisor C の定

める直線束[C]のC上への制限もN_Cに一致するが，Fと[C]とが一致するのは丁度性質(B)が成立するときである。

Cをfinite type nとしよう。type nの函数系$\{(V_\lambda, w_\lambda)\}$をとる。$\{1/w_\lambda^n\}$は$F^{-n}$の有理型切断からなるCousin I dataである。実際

$$t_{\lambda\mu} w_\mu - w_\lambda = f_{\lambda\mu|n+1}(z_\lambda) w_\lambda^{n+1} + \cdots \quad \text{より}$$

$$t_{\lambda\mu}^{-n}(1/w_\mu^n) - 1/w_\lambda^n = -n f_{\lambda\mu|n+1}(z_\lambda) + \cdots 。$$

この右辺を$f_{\lambda\mu}$とおくと，$\{f_{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(F^{-n}))$.
このCへの制限は$\{-n f_{\lambda\mu|n+1}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(N_C^{-n}))$でcoboundaryではない。ここで3°で見たことをつかうと，これは調和切断の0-cochainのcoboundaryである：$t_{\lambda\mu}^{-n} h_\mu^0 - h_\lambda^0 = -n f_{\lambda\mu|n+1}$なる$\{h_\lambda^0\}$がある。$h_\lambda$を$V_\lambda$上の函数$h_\lambda(z_\lambda)$とみる。$f_{\lambda\mu} - t_{\lambda\mu}^{-n} h_\mu^0 + h_\lambda^0$は各$V_\lambda \cap V_\mu$上の多重調和函数であり，$U_\lambda \cap U_\mu$上0になる。しかも

$\{f_{\lambda\mu} - t_{\lambda\mu}^{-n} h_\mu^0 + h_\lambda^0\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{H}(F^{-n}))$，ここに$\mathcal{H}$は多重調和切断のなす層。これを正則及び反正則函数の和に書く，$f_{\lambda\mu} - t_{\lambda\mu}^{-n} h_\mu^0 + h_\lambda^0 = g'_{\lambda\mu} + \overline{g''_{\lambda\mu}}$，
$U_\lambda \cap U_\mu$上$g'_{\lambda\mu} = g''_{\lambda\mu} = 0$．$\{g'_{\lambda\mu}\}$，$\{g''_{\lambda\mu}\}$はそれぞれ

$Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(F^{-n}))$, $Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(F^{n}))$ の元。また $\{g'_{\lambda\mu}/w_\lambda\}$, $\{g''_{\lambda\mu}/w_\lambda\}$ はそれぞれ order $n+1$ 以上の項を無視して, F^{-n-1}, F^{n-1} の正則切断の 1-cocycle。これらを C 上に制限して調和切断の 0-cochain の coboundary と表わす。------ という操作を続けて

$$h_\lambda = \sum_{\substack{j,k\geq 0 \\ j+k\leq n}} h_{\lambda;j,k}(z_\lambda) w_\lambda^j \bar{w}_\lambda^k \qquad h_{\lambda;j,k}: \text{調和}$$
$$(h_{\lambda;0,0} = h_\lambda^0)$$

で $f_{\lambda\mu} = t_{\lambda\mu}^{-n} h_\mu - h_\lambda + (\text{order} \geq n+1 \text{ の項})$

なるものが構成される。即ち, $V_\lambda \cap V_\mu$ 上

$t_{\lambda\mu}^{-n}(1/w_\mu^n - h_\mu)$ と $1/w_\lambda^n - h_\lambda$ とは order $\geq n+1$ の項を除いて一致する。滑らかな函数 α_λ によって修正して, $\{1/w_\lambda^n - h_\lambda + \alpha_\lambda\}$ を C に"pole"をもつ F^{-n} の滑らかな切断とすることができる。これを φ とする。$|\varphi|^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ を少し修正すれば強擬凸函数を得る (TH. 1)。また, $|\varphi|^{1-\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ を修正して, その complex Hessian がいたるところ正負の固有値をもつようにできる。TH.2 はこの函数と ψ との比較をすることで証明される。

5° TH. 3 の証明について。求める函数系を形式的巾級数として構成する。このときの obstructions がすべて消えるための必要充分条件が Infinite type であること。この巾級数の収束を，条件 $N_C \in \mathcal{E}$ があるときには証明することができる。$N_C \in \mathcal{E}_0$ のときは，Kodaira—Spencer [5] と同様にできる。$N_C \in \mathcal{E}_1$ の場合に必要な Lemmas をあげる。

C をコンパクト Riemann 面とし，C の有限開被覆 $\mathcal{U}=\{U_\lambda\}$ を一つ固定しておく。$E \in \mathrm{Pic}(C)$ とする。$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ を E の正則切断のなす q-cochain で，各切断が有界なもの全体とする。E に標準的なノルムがあるから，これから普通の仕方で $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ にノルムが導入される。また coboundary 写像 $\delta : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ は $E \neq 1$ なら単射である。

LEMMA 1　ある定数 $K\,(>0)$ があって，任意の $E \in \mathrm{Pic}(C)$，および任意の $f \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ に対して，

$$\|\delta f\| \geqq \frac{d(E,1)}{K}\|f\|$$ が成立つ。——

証明は正値調和函数についての Harnack の定理に帰着させることによって，elementary になされる。Kodaira-Spencer の lemma によって，E を固定すれば，δ は開写像であるが，この"開き具合"が，E が 1 に近ずくとき小さくなる。これが $d(E,1)/K$ よりは大きいというのが LEMMA である。

LEMMA. 2 （Siegel [8]）

ε_j , $j=1,2,\cdots\cdots$ は次の条件を充す数列とする：

(i) $0 < \varepsilon_j < (2j)^{-\nu}$ $(j=1,2\cdots)$, $\exists\nu>0$

(ii) $\dfrac{1}{\varepsilon_{j+k}} \leqq \dfrac{1}{\varepsilon_j} + \dfrac{1}{\varepsilon_k}$ $(j>k)$

このとき，函数方程式

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon_{j-1}}A_j u^j = \sum_{k=2}^{\infty}\Big(u+\sum_{l=2}^{\infty}A_l u^l\Big)^k \left(= \frac{A(u)^2}{1-A(u)}\right)$$

の解 $A(u) = u + A_2u^2 + A_3u^3 + \cdots\cdots$ は正の収束

半径をもつ。——

REMARK. Siegel [8] では次のような問題が扱われている。$f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$ を $\mathbb{C}$ の原点 0 の周りの正則変換で $|a_1|=1$, $a_1^\nu\neq 1$ ($\forall\nu$) なるものとする。原点の周りの座標を $z=\varphi(\zeta)=\zeta+c_2\zeta^2+c_3\zeta^3+\cdots$ によってとり直して $\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi(\zeta)=a_1\zeta$ という形にできるか? 係数の比較によって形式的巾級数 $\zeta+c_2\zeta^2+\cdots$ は一意的に定まる。Siegel は $\log\frac{1}{|a_1^k-1|}=O(\log k)$ $(k\to\infty)$ ならば級数が収束することを示している。上の LEMMA はこの証明の実質的な部分である。(また, Arnol'd [1] をも参照).

REFERENCES.

[1] Arnol'd, V.I. Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves. Funktsional'nyi Analiz i Ego Priozheniya Vol. 10. No. 4. pp 1-12. Oct-Dec. (1976)

[2] Grauert, H. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. 146 331-368 (1962)

[3] ———. Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten. Math. Z. 81 377-391 (1963)

[4] Hartshorne. R. Ample subvarieties of Algebraic varieties, Lec. notes. in math. 156 Springer.

[5] Kodaira. K.- Spencer. D.C. A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems. Amer. J. Math. 81 (1959) 477-500.

[6] Kodaira. K. 複素多様体と複素構造の変形 東大セミナリーノート 31 (1974).

[7] Miyajima. K. 埋め込みのequivalenceについて 数学 30巻 4号 (1978).

[8] Siegel, C.L. Iterations of analytic functions
Ann. of Math. 43 (1942) 607-612
[9] Suzuki. O. Neighborhoods of a compact non-singular algebraic curve imbedded in a 2-dimensional complex manifold. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 11 (1975) 189-199.
[10] Ogus, A. The formal Hodge filtration
Invent. math. 31 (1976) 193-228.